UNIVERSITEIT GENT

# Lineaire algebra en meetkunde II

Anneleen De Schepper & Hendrik Van Maldeghem

1e bachelor Wiskunde
2021-2022, semester 2

# Inhoudsopgave

# Voorwoord

Het opleidingsonderdeel Lineaire Algebra en Meetkunde II, kortweg LAM II, bouwt verder op LAM I, maar niet in de traditionele zin. Het is niet zo dat we de draad opnemen waar we die in het laatste hoofdstuk van LAM I neerlegden. In de cursus LAM I werden vectorruimten theoretisch bestudeerd en werd uiteindelijk een affiene meetkunde geconstrueerd vanuit een vectorruimte. In het eerste, en meest uitgebreide hoofdstuk van deze cursus bewandelen we de omgekeerde weg. We bestuderen axiomatische affiene meetkundes, en tonen uiteindelijk aan dat deze onder enkele voorwaarden afkomstig zijn van een vectorruimte. In het tweede en derde hoofdstuk bouwen we dan weer wel verder op LAM I, met in hoofdstuk 2 de studie van bilineaire en sesquilineaire vormen, een veralgemening van de studie van inproducten, en in hoofdstuk 3 de traditionele studie van de kegelsneden in het reële affiene vlak.

Hoewel het een vrij meetkundige cursus is, zijn er geen tekeningen voorzien. Dit is een bewuste keuze, aangezien we het belangrijk vinden dat jullie zelf eigen tekeningen maken. Om deze reden is de cursus niet recto verso afgedrukt, zo is er hiervoor plaats genoeg.

*Vragen over de cursus, meldingen van typfouten of andere problemen? Steeds welkom voor vragen voor of na de les, of stuur gerust een mailtje naar* `Anneleen.DeSchepper@UGent.be`.

# Hoofdstuk 1 Axiomatische Affiene Ruimten

In dit hoofdstuk voeren we axiomatisch het begrip *affiene ruimte* in. Voorbeelden hiervan worden geconstrueerd aan de hand van vectorruimten. We bestuderen begrippen zoals deelruimten, dimensie, automorfismen en in het bijzonder dilataties en homothetieën. Deze laatste twee begrippen zullen cruciaal zijn in het volgend hoofdstuk.

## 1.1 Axioma's van een affiene ruimte

We beginnen met de definitie van een affien vlak. Later zullen we zien dat dit een *affiene ruimte van dimensie* 2 is.

**Definitie 1.1.1: Affien vlak**

Een *affien vlak* $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L})$ bestaat uit een verzameling $\mathscr{P}$ waarvan de elementen *punten* genoemd worden, en een familie $\mathscr{L}$ van deelverzamelingen van $\mathscr{P}$ waarvan de elementen *rechten* of *lijnen* genoemd worden, waarvoor de volgende verbindingsaxioma's gelden.

(AV1) Elk paar verschillende punten is bevat in een unieke rechte.

(AV2) **(Axioma van Euclides)** Gegeven een rechte $R \in \mathscr{L}$ en een punt $x \notin R$, dan bestaat er een unieke rechte die $x$ bevat en die disjunct is met $R$.

(AV3) Er zijn drie punten die niet bevat zijn in een gemeenschappelijke rechte.

Het gewone reële vlak is een affien vlak:

**Voorbeeld 1.1.2** Zij $\mathscr{P} = \mathbb{R}^2$ en definieer een rechte als de verzameling van koppels $(x, y) \in \mathscr{P}$ die voldoen aan de gelijkheid $ax + by + c = 0$, voor zekere $a, b, c \in \mathbb{R}$, met $a$ of $b$ verschillend van 0. Zij $\mathscr{L}$ de verzameling van de rechten. Dan is $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$ een affien vlak, het *reële affiene vlak* genoemd.

We kunnen in het voorgaand voorbeeld sommige rechten een beetje vervormen om een nieuw affien vlak te construeren. Dit kan als volgt gebeuren:

**Voorbeeld 1.1.3** Zij $\mathscr{P} = \mathbb{R}^2$. Om de rechten te definiëren beschouwen we een ellips $\mathscr{E}$ in $\mathbb{R}^2$ met vergelijking $X^2 + 4Y^2 = 1$. Stel $p = (3/2, 0)$. Definieer nu de elementen van $\mathscr{L}$ als volgt:

- de rechten van $\mathbb{R}^2$ (zoals beschreven in voorbeeld 1.1.2) die $\mathscr{E}$ in ten hoogste één punt snijden;
- de rechten van $\mathbb{R}^2$ (zoals beschreven in voorbeeld 1.1.2) die $\mathscr{E}$ die door $p$ gaan;
- de rechten van de vorm "$[L] \cup B_L$", waarbij $L$ een rechte is van $\mathbb{R}^2$ die $\mathscr{E}$ in twee verschillende punten $u, v$ snijdt en niet door $p$ gaat, $[L]$ het deel van $L$ is dat niet in het inwendige van $\mathscr{E}$ ligt, en $B_L$ de boog is van de cirkel door $u, v, p$ begrensd door $u$ en $v$, die wel in het inwendige van de ellips ligt.

Deze constructie werd uitgedacht door David Hilbert in 1899 en we noemen daarom $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L})$ een *Hilbertvlak*. In de oefeningen zal je bewijzen dat dit een affien vlak is.

Een belangrijk concept in affiene vlakken, ingebouwd in het Axioma van Euclides, is parallellisme:

**Definitie 1.1.4: Parallelle rechten in het vlak**

Gegeven een affien vlak $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L})$, dan noemen we twee rechten $L, L' \in \mathscr{L}$ *parallel* of *evenwijdig* als ofwel $L = L'$, ofwel $L \cap L' = \emptyset$, en we noteren $L \parallel L'$.

Het Axioma van Euclides garandeert dat evenwijdigheid een equivalentierelatie is (reflexiviteit en symmetrie volgen rechtstreeks uit de definitie, we hoeven dus alleen nog transitiviteit na te gaan).

**Stelling 1.1.5: Transitiviteit van evenwijdigheid in een vlak**

*Zij $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L})$ een affien vlak, en zij $L, L', L'' \in \mathscr{L}$. Als $L \parallel L'$ en $L' \parallel L''$, dan $L \parallel L''$.*

*Bewijs.* Indien $L = L'$ of $L' = L''$, dan is het gestelde triviaal. Onderstel dus dat $L \neq L' \neq L''$. Onderstel dat $L$ en $L''$ niet disjunct zijn. Dan bestaat een punt $x \in L \cap L''$. Wegens $L \cap L' = \emptyset$ is $x \notin L'$. De uniciteit in het Axioma van Euclides impliceert nu dat $L = L''$, en bijgevolg $L \parallel L''$.

We kunnen ook bewijzen dat elke rechte "rijk" genoeg is, dat wil zeggen, ten minste twee punten bevat.

**Stelling 1.1.6: Kardinaliteit van rechten in een vlak**

- *Elke rechte van een affien vlak bevat ten minste twee punten.*
- *Alle rechten bevatten evenveel punten.*

*Bewijs.* Onderstel eerst dat een rechte $L$ ledig zou zijn. Dan is elke rechte parallel met $L$. Maar wegens axioma (AV3) bestaan er twee rechten door eenzelfde punt, strijdig met axioma (AV2).

Onderstel nu dat een rechte $L$ een singleton $\{x\}$ is. We gebruiken axioma (AV3) om twee punten $y, z$ te vinden waarvoor $x, y, z$ niet in een zelfde rechte bevat zijn. Zij nu $M$ de rechte die $x$ en $y$ bevat. Dan is er wegens axioma (AV2) een rechte $K$ door $z$ die disjunct is met $M$. Maar nu zijn er twee rechten door $x$ die disjunct zijn met $K$, namelijk $L$ en $M$. Dat is in tegenspraak met axioma (AV2). Aldus bestaat elke rechte uit ten minste twee punten.

Zij nu $L$ en $M$ twee rechten van een affien vlak. Daar elke rechte ten minste twee punten bevat kunnen we punten $y \in L \setminus M$ en $z \in M \setminus L$ kiezen, en de rechte $K$ door $y$ en $z$ beschouwen.

We merken nu op dat uit stelling 1.1.5 volgt dat elke rechte $K'$ die parallel is met $K$, elk van de rechten $L$ en $M$ snijdt. Nu is elk punt van $L$ bevat in zo een unieke rechte evenwijdig met $K$, en hetzelfde geldt voor elk punt van $M$. Bijgevolg definiëren de rechten evenwijdig met $K$ een bijectie tussen $L$ en $M$.

Dat alle rechten van het reële affiene vlak evenveel punten hebben is logisch — ze hebben er allemaal een overaftelbaar aantal. We bewezen in stelling 1.1.6 dat elke rechte ten minste twee punten heeft. Zijn er ook affiene vlakken waarvan de rechten allemaal juist twee punten bevatten? We proberen zo een vlak op te bouwen in het volgende voorbeeld.

**Voorbeeld 1.1.7** We starten met één rechte $\{a, b\}$, die juist de punten $a$ en $b$ bevat. Axioma (AV3) impliceert dat er minstens nog een punt is, noem het $c$. Wegens axioma (AV2) is er een rechte die $c$ bevat en disjunct is met $\{a, b\}$. Deze rechte bevat ook twee punten, en dus hebben we een vierde punt, noem het $d$, waarvoor $\{c, d\}$ een rechte is. De paren $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$ en $\{b, d\}$ zijn ook allemaal rechten, dit volgt uit axioma (AV1) en het feit dat elke rechte juist twee punten bevat. Mocht er nu nog een vijfde punt zijn, zegge $e$, dan zou ook $\{a, e\}$ een rechte zijn, maar disjunct zijn met $\{a, b\}$ en $\{a, c\}$, wat strijdig is met axioma (AV2). De structuur $(\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{bc\}, \{b, d\}, \{cd\}\})$ is nu wel een affien vlak.

Op een gelijkaardige manier kan je proberen een affien vlak maken waar alle rechten juist drie, resp. vier, resp. vijf punten hebben. Dat dit lukt, zie je in de oefeningen. We geven als voorbeeld nog een affien vlak met drie punten per rechte.

**Voorbeeld 1.1.8** Beschouw de volgende matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

We definiëren de elementen van $A$, dus $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ als puntenverzameling $\mathscr{P}$, en de rechtenverzameling $\mathscr{L}$ bestaat uit de verzamelingen $\{x, y, z\}$ van grootte 3 uit $\mathscr{P}$ waarbij ofwel $(x, y, z)$ een rij of een kolom is van $A$, ofwel $xyz$ één van de termen is van $\det(A) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$. Dan is $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$ een affien vlak met 9 punten en 12 rechten. De methode met de matrix is natuurlijk voornamelijk een mnemotechnisch middel, en zorgt ook voor een mooie tekening waarop je duidelijk de parallelklassen kan zien.

Nu kunnen we algemene affiene ruimten invoeren, van willekeurige dimensie $\geq 3$. Deze bestaan niet enkel uit punten en rechten zoals de affiene vlakken, maar worden ook uitgerust met een familie van vlakken, waarvan gevraagd wordt dat ze affien zijn.

**Definitie 1.1.9: Affiene ruimten van dimensie $\geq 3$**

Een *affiene ruimte (van dimensie $\geq 3$)* $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$ bestaat uit een verzameling $\mathscr{P}$ waarvan de elementen *punten* genoemd worden, een familie $\mathscr{L}$ van deelverzamelingen van $\mathscr{P}$ waarvan de elementen *rechten* of *lijnen* genoemd worden, en een familie $\mathscr{V}$ van deelverzamelingen van $\mathscr{P}$ waarvan de elementen *vlakken* genoemd worden, waarvoor de volgende verbindingsaxioma's gelden.

(AR1) Elk paar verschillende punten is bevat in een unieke rechte.

(AR2) Elk drietal verschillende punten dat niet bevat is in een gemeenschappelijke rechte is bevat in een uniek vlak.

(AR3) Elk vlak $V \in \mathscr{V}$ is een affien vlak waarvan de puntenverzameling $V$ is, en waarvoor de verzameling van rechten bestaat uit alle elementen van $\mathscr{L}$ die volledig bevat zijn in $V$.

(AR4) Gegeven twee vlakken $V_1$ en $V_2$, met $V_1 \cap V_2 = L \in \mathscr{L}$. Dan behoort elk paar rechten $L_1 \subseteq V_1$ en $L_2 \subseteq V_2$, met $L_1 \parallel L \parallel L_2$, tot een gemeenschappelijk vlak.

(AR5) Er zijn vier punten die niet bevat zijn in een gemeenschappelijk vlak, noch in een gemeenschappelijke rechte.

Merk op dat we in axioma (AR4) enkel parallellisme gebruiken binnen de vlakken $V_1$ en $V_2$. Verderop zullen we ook parallellisme definiëren in $\mathscr{A}$.

Zoals eerder gezegd zullen we een affien vlak vaak ook zien als een affiene ruimte van dimensie 2. Inderdaad, indien $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$ een affien vlak is, kunnen we het ook schrijven als "affiene ruimte

$\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$ van dimensie 2" , waarbij $\mathscr{V}$ het singleton $\{\mathscr{P}\}$ is; hierbij voldoet $\mathscr{A}$ aan Axioma's (AR1) t.e.m. (AR4) maar niet aan (AR5). Later zullen we aan de zinsnedes "van dimensie 2" en "van dimensie $\geq 3$" een scherp wiskundige betekenis geven; momenteel is het alleen maar notatie. In wat volgt zullen we met een "affiene ruimte" steeds bedoelen "een affiene ruimte van dimensie $\geq 3$", al zullen we de dimensie expliciet vermelden wanneer de uitspraak niet geldig zou zijn voor affiene vlakken.

**Notatie**

- De rechte door de twee verschillende punten $x$ en $y$ wordt vaak genoteerd met $xy$. Een andere veelgebruikte notatie is $\langle x, y\rangle$. Wij zullen deze laatste verkiezen, omdat ze handiger te veralgemenen is.
- Algemeen noemen we een verzameling $S \subseteq \mathscr{P}$ van punten *collineair* indien deze punten bevat zijn in één gemeenschappelijke rechte. We noteren die rechte ook door $\langle S\rangle$.
- Voor drie punten $x, y, z$ die niet bevat zijn in een gemeenschappelijke rechte, noteren we met $\langle x, y, z\rangle$ het uniek vlak door die drie punten (cf. (AR2)).

We bewijzen enkele eenvoudige eigenschappen van affiene ruimten.

**Lemma 1.1.10** *In een affiene ruimte is een rechte in een vlak gelegen zodra deze ten minste twee punten gemeen hebben. Daaruit volgt dat elk vlak en elke rechte niet volledig bevat in het vlak ten hoogste één punt gemeen hebben.*

*Bewijs.* Zij $L$ een rechte die ten minste twee punten $x, y$ gemeen heeft met een vlak $V$. Axioma's (AR3) en (AV1) impliceren dat er een rechte $L'$ is die volledig bevat is in $V$ en zelf de punten $x$ en $y$ bevat. Axioma (AR1) garandeert dat $L = L'$.

**Lemma 1.1.11** *Elke affiene ruimte van dimensie $\geq 3$ bevat ten minste twee vlakken.*

*Bewijs.* Zij $a, b, c, d$ vier punten niet bevat in een gemeenschappelijk vlak, noch in een gemeenschappelijke rechte, zoals gegarandeerd door axioma (AR5). Dit laatste impliceert dat de rechte $\langle a, b\rangle$ niet beide punten $c, d$ kan bevatten. We mogen dus onderstellen dat $c \notin \langle a, b\rangle$. Dan hebben we, door axioma (AR2), alvast het vlak $\langle a, b, c\rangle$. Nu is $d \notin \langle a, b, c\rangle$ wegens het gegeven, en is $\langle a, b\rangle \subseteq \langle a, b, c\rangle$ wegens lemma 1.1.10. We besluiten dat $d \notin \langle a, b\rangle$ en $\langle a, b, d\rangle \neq \langle a, b, c\rangle$.

Vervolgens bewijzen we het analogon van stelling 1.1.6.

**Stelling 1.1.12: Kardinaliteit van rechten in de ruimte**

- *Elke rechte van een affiene ruimte bevat ten minste twee punten.*
- *Alle rechten bevatten evenveel punten.*

*Bewijs.* Zij $L$ een willekeurige rechte van een affiene ruimte. Als $L = \emptyset$, dan is $L$ bevat in elk vlak (en er bestaan minstens twee vlakken, zie lemma 1.1.11). Dit is strijdig met stelling 1.1.6. Onderstel nu dat $L = \{a\}$, met $a$ een punt. Wegens axioma (AR5) zijn niet alle punten bevat in $L$, dus bestaat een punt $x$ buiten $L$. Wegens het zelfde axioma zijn niet alle punten bevat in de rechte $\langle a, x\rangle$, dus bestaat een punt $y \notin \langle a, x\rangle$. Uit axioma (AR2) volgt nu het bestaan van het affien vlak $\langle a, x, y\rangle$ dat $x, y$ en $L$ bevat, strijdig met stelling 1.1.6. Dus elke rechte bevat ten minste twee punten.

Zij nu $L$ en $M$ twee snijdende rechten. Door axioma (AR2) kunnen we een vlak $V$ vinden dat het snijpunt van $L$ en $M$ bevat, en daarbovenop nog eens een punt van $L \setminus M$ en één van $M \setminus L$. Lemma 1.1.10 impliceert $L \subseteq V$ en $M \subseteq V$. Uit stelling 1.1.6 volgt nu dat $L$ en $M$ gelijkmachtig zijn.

Zijn $L$ en $M$ twee niet-snijdende rechten, dan kiezen we punten $x \in L$ en $y \in M$. Uit de voorgaande paragraaf volgt nu dat $L$ en de rechte $\langle x, y\rangle$ gelijkmachtig zijn, en ook $\langle x, y\rangle$ en $M$. Dus ook $L$ en $M$ zijn gelijkmachtig.

Het axioma (AR2) kan nu geformuleerd worden als elk van de twee volgende uitspraken.

**Gevolg 1.1.13** • *In een affiene ruimte zijn een rechte $L$ en een punt $x$ dat niet behoort tot deze rechte bevat in een uniek vlak.*

• *In een affiene ruimte zijn twee snijdende rechten bevat in een uniek vlak.*

*Bewijs.* Wegens stelling 1.1.12 kunnen we twee punten $x', x''$ in $L$ kiezen. Axioma (AR2) geeft een vlak $V$ dat $x, x', x''$ bevat. Lemma 1.1.10 zegt dat $L \subseteq V$. Voor de tweede bewering kiezen we een punt op de ene rechte dat niet op de andere ligt en passen voorgaande eigenschap toe.

**Notatie**

Het vlak dat een rechte $L$ en een punt $x \notin L$ bevat noteren we door $\langle L, x\rangle$ of $\langle x, L\rangle$. Een vlak dat twee snijdende rechte $L, M$ bevat noteren we door $\langle L, M\rangle$.

## 1.2 Parallellisme of evenwijdigheid

We voeren nu parallellisme (of evenwijdigheid) in van rechten en bekijken nader de relatie "parallel zijn met" (of "evenwijdig zijn met"). We breiden het ook uit naar vlakken. Axioma (AR4) zal ervoor zorgen dat parallellisme van rechten ook hier een equivalentierelatie is.

**Definitie 1.2.1: Parallelle rechten in de ruimte**

Twee rechten $L, L'$ van een affiene ruimte noemen we *parallel* of *evenwijdig*, wanneer ze parallel zijn in een vlak, m.a.w., wanneer ze ofwel samenvallen, ofwel disjunct zijn en bevat zijn in een gemeenschappelijk vlak. We blijven dit noteren met $L \parallel L'$.

**Stelling 1.2.2: Transitiviteit van evenwijdigheid in de ruimte**

*Zij $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$ een affiene ruimte. Dan is parallellisme een equivalentierelatie.*

*Bewijs.* Per definitie is parallellisme een reflexieve en symmetrische relatie is. Voor de transitiviteit, beschouwen we $L, L', L'' \in \mathscr{L}$ met $L \parallel L'$ en $L' \parallel L''$. We tonen aan dat $L \parallel L''$. Indien $L, L'$ en $L''$ bevat zijn in een gemeenschappelijk vlak, dan volgt dit uit stelling 1.1.5. Onderstel dus dat $L, L'$ en $L''$ niet begrepen zijn in eenzelfde vlak, in het bijzonder is dus $L \neq L' \neq L''$. Daar $L \parallel L'$ en $L \neq L'$ liggen $L$ en $L'$ in een uniek gemeenschappelijk vlak $V_1$. Zo ook liggen $L'$ en $L''$ in een uniek gemeenschappelijk vlak $V_2$. We hebben alvast $L' \subseteq V_1 \cap V_2$. Indien $x \in V_1 \cap V_2$ bestond, met $x \notin L'$, dan zou wegens Gevolg 1.1.13, $V_1 = \langle x, L' \rangle = V_2$, een strijdigheid. We kunnen dus axioma (AR4) toepassen en bekomen een vlak $V$ dat $L$ en $L''$ bevat. Daar $L \cap L'' = \emptyset$ (anders is $(V_1 \cap V_2) \setminus L'$ toch niet ledig), besluiten we $L \parallel L''$.

We kunnen nu ook het Axioma van Euclides aantonen in affiene ruimten.

**Stelling 1.2.3: Parallellepostulaat in de ruimte**

*Zij $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$ een affiene ruimte, zij $L \in \mathscr{L}$ en $x \in \mathscr{P}$. Dan bestaat er een unieke rechte $M \in \mathscr{L}$ met $x \in M \parallel L$.*

*Bewijs.* Is $x \in L$, dan voldoet $L$ zelf aan de voorwaarden. Een andere rechte door $x$ kan niet parallel zijn met $L$ omdat deze niet samenvalt met $L$, en er ook niet disjunct mee is. Onderstel nu $x \notin L$. Wegens Gevolg 1.1.13 bestaat een uniek (affien) vlak $V$ met $x \in V$ en $L \subseteq V$. De stelling volgt nu uit het feit dat, in $V$, ook de evenwijdige aan $L$ door $x$ uniek is.

We breiden nu het begrip “parallellisme” of “evenwijdigheid” uit naar de familie van vlakken.

**Definitie 1.2.4: Parallelle vlakken**

Zij $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$ een affiene ruimte, en zij $V_1, V_2 \in \mathscr{V}$. Dan noemen we $V_1$ *parallel* of *evenwijdig* met $V_2$ indien voor elke rechte $L_1 \subseteq V_1$ er een rechte $L_2 \subseteq V_2$ bestaat met $L_1 \parallel L_2$. We noteren $V_1 \parallel V_2$.

Ook parallellisme tussen vlakken is een equivalentierelatie. Om dit aan te tonen is het efficiënter om eerst het nu volgende criterium van parallellisme van vlakken te bewijzen.

**Stelling 1.2.5: Criterium voor evenwijdigheid van vlakken**

*Zij $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$ een affiene ruimte, en zij $V_1, V_2 \in \mathscr{V}$ willekeurig. Dan is $V_1 \parallel V_2$ als en slechts als er ten minste twee snijdende rechten $L_1, L_1'$ in $V_1$, en twee rechten $L_2, L_2'$ in $V_2$ bestaan, waarvoor $L_1 \parallel L_2$ en $L_1' \parallel L_2'$.*

*Bewijs.* Indien $V_1 \parallel V_2$, dan is de voorwaarde voldaan per definitie.

Onderstel nu dat we twee snijdende rechten $L_1, L_1'$ in een vlak $V_1$ kunnen vinden, en er twee rechten $L_2, L_2'$ in een vlak $V_2$ zijn, met $L_1 \parallel L_2$ en $L_1' \parallel L_2'$. We mogen onderstellen dat $V_1 \neq V_2$, anders is het te bewijzen triviaal. Merk ook op dat $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Inderdaad, mocht een punt $x$ tot beide vlakken behoren, dan zou door $x$ een rechte gaan in $V_1$ parallel aan $L_1$, en in $V_2$ parallel aan $L_2$; deze twee rechten vallen samen wegens de transitiviteit van de evenwijdigheid. Dus snijden $V_1$ en $V_2$ in een rechte evenwijdig aan $L_1$. Analoog bevatten beide vlakken ook een rechte parallel met $L_1'$. Gevolg 1.1.13 impliceert nu $V_1 = V_2$.

Zij $L$ een willekeurige rechte in $V_1$. We bewijzen dat er een rechte $L' \subseteq V_2$ bestaat parallel met $L$. Indien $L$ parallel is met $L_1$ of met $L_1'$, dan is wegens stelling 1.2.2 $L$ evenwijdig met $L_2$ of met $L_2'$, respectievelijk. Onderstel dus dat $L$ niet evenwijdig is met $L_1$, noch met $L_1'$. Door eventueel $L_1$ te vervangen door een evenwijdige eraan in $V_1$, mogen we onderstellen dat $\{x_1\} = L \cap L_1 \neq L \cap L_1' = \{x_1'\}$. Stel nu ook $y_1 = L_1 \cap L_1'$ en $y_2 = L_2 \cap L_2'$ (merk op dat $L_2$ en $L_2'$ inderdaad niet evenwijdig zijn, want dit zou door stelling 1.2.2 impliceren dat $L_1$ evenwijdig was met $L_1'$); stel $M$ de rechte die $y_1$ en $y_2$ bevat (de uniciteit van $M$ volgt uit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ en dus $y_1 \neq y_2$). Noem $V_{12}$ het vlak door $L_1$ en $L_2$ en laat $V_{12}'$ het vlak zijn door $L_1'$ en $L_2'$. Het is duidelijk dat $V_{12} \neq V_{12}'$, en dat $M \subseteq V_{12} \cap V_{12}'$. Bijgevolg is $M = V_{12} \cap V_{12}'$.

In $V_{12}$ zijn $L_1$ en $L_2$ disjunct en is $M$ niet evenwijdig aan $L_1$. Zij $K$ de rechte door $x_1$ evenwijdig aan $M$. Deze snijdt $L_2$ in een punt $x_2$. Analoog snijdt de rechte $K'$ door $x_1'$ en evenwijdig aan $M$ in $V_{12}'$ de rechte $L_2'$ is een punt $x_2'$. Wegens axioma (AR4) zijn $K$ en $K'$ evenwijdig en liggen dus in een vlak $V$. Het vlak $V$ snijdt het vlak $V_2$ in de rechte $L'$ die $x_2$ en $x_2'$ bevat. Daar $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, is ook $L \cap L' = \emptyset$, dus $L \parallel L'$ en de stelling is bewezen.

De tweede paragraaf van voorgaand bewijs heeft een meldenswaardig gevolg:

**Gevolg 1.2.6** *In een affiene ruimte zijn twee evenwijdige vlakken ofwel samenvallend ofwel disjunct.*

Merk op dat het omgekeerde niet noodzakelijk geldt. Dat zal slechts het geval zijn in 3-dimensionale affiene ruimten, maar we moeten het begrip dimensie nog invoeren.

**Stelling 1.2.7: Transitiviteit van parallellisme van vlakken**

*In een willekeurige affiene ruimte $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$ is parallellisme een equivalentierelatie in de familie van vlakken.*

*Bewijs.* Parallellisme is duidelijk een reflexieve relatie. We tonen nu aan dat ze ook symmetrisch is. Zij $V_1, V_2 \in \mathscr{V}$ met $V_1 \parallel V_2$. Dan vinden we, wegens stelling 1.2.5 twee snijdende rechten $L_1, L_1'$ in $V_1$, en twee rechten $L_2, L_2'$ in $V_2$, met $L_1 \parallel L_2$ en $L_1' \parallel L_2'$. We hebben al opgemerkt in het bewijs van stelling 1.2.5 dat $L_2$ niet evenwijdig is met $L_2'$. Dezelfde stelling toont nu dat $V_2 \parallel V_1$.

Ten slotte bewijzen we dat de relatie transitief is. Onderstel daartoe $V_1 \parallel V_2 \parallel V_3$, $V_1, V_2, V_3 \in \mathscr{V}$. Beschouw twee snijdende rechten $L_1, L_1'$ in $V_1$. Wegens stelling 1.2.5 vinden we twee (snijdende) rechten $L_2, L_2'$ in $V_2$ met $L_1 \parallel L_2$ en $L_1' \parallel L_2'$. Wegens definitie 1.2.4 bestaan er rechten $L_3, L_3'$ in $V_3$ met $L_2 \parallel L_3$ en $L_2' \parallel L_3'$. Stelling 1.2.2 impliceert $L_1 \parallel L_3$ en $L_1' \parallel L_3'$, waaruit door stelling 1.2.5 volgt dat $V_1 \parallel V_3$.

We hebben ook het volgende analogon van het Axioma van Euclides.

**Stelling 1.2.8: Parallellepostulaat voor vlakken**

*Gegeven een vlak $V$ van een affiene ruimte en een punt $x$. Dan is er een uniek vlak $V'$ met $x \in V' \parallel V$.*

*Bewijs.* De uniciteit volgt uit gevolg 1.2.6. Het bestaan bewijzen we als volgt. We beschouwen twee snijdende rechten $L, M$ in $V$. Stelling 1.2.3 garandeert het bestaan van twee rechten $L', M'$ evenwijdig aan respectievelijk $L$ en $M$ en door $x$. Uit stelling 1.1.13 volgt dat $L'$ en $M'$ bevat zijn in een uniek vlak (daar $L' \neq M'$ wegens transitiviteit van evenwijdigheid) $V'$. Stelling 1.2.5 impliceert nu $V \parallel V'$.

Om een zo volledig mogelijk overzicht te kunnen geven van de onderlinge ligging tussen een rechte en een vlak, breiden we nu het begrip *evenwijdigheid* uit tot een relatie tussen rechten en vlakken.

**Definitie 1.2.9: Parallellisme tussen rechten en vlakken**

Een rechte noemen we *evenwijdig* met een vlak indien de rechte evenwijdig is met ten minste één rechte van het vlak.

De volgende stelling vermeldt alle mogelijkheden voor de onderlinge ligging van twee rechten, een rechte en een vlak, of twee vlakken.

**Stelling 1.2.10: Onderlinge ligging van rechten en vlakken**

- *Zij $L_1$ en $L_2$ rechten van een affiene ruimte. Dan doet juist één van de volgende mogelijkheden zich voor.*
  - $L_1 = L_2$;
  - $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ *en* $L_1 \parallel L_2$;
  - $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ *en* $L_1$ *niet evenwijdig met* $L_2$;
  - $L_1 \cap L_2$ *is een singelton.*
- *Zij $L$ een rechte en $V$ een vlak van een affiene ruimte. Dan doet juist één van de volgende mogelijkheden zich voor.*
  - $L \subseteq V$;
  - $L \cap V = \emptyset$ *en* $L$ *is evenwijdig met* $V$;
  - $L \cap V = \emptyset$ *maar* $L$ *is niet evenwijdig met* $V$;
  - $L \cap V$ *is een singelton.*
- *Zij $V_1$ en $V_2$ vlakken van een affiene ruimte. Dan doet juist één van de volgende mogelijkheden zich voor.*
  - $V_1 = V_2$;
  - $V_1 \cap V_2$ *is een rechte;*
  - $V_1 \cap V_2$ *is een singelton, en in dit geval is geen enkele rechte van* $V_1$ *evenwijdig met een rechte van* $V_2$;
  - $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ *en geen enkele rechte van* $V_1$ *is evenwijdig aan een rechte van* $V_2$;
  - $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ *en* $V_1$ *is evenwijdig met een rechte van* $V_2$, *maar* $V_1$ *is niet evenwijdig aan* $V_2$;
  - $V_1 \parallel V_2$ *maar* $V_1 \neq V_2$.

*Bewijs.* Oefening.

Als slot van deze paragraaf bewijzen we een stelling die uitdrukt dat de vlakkenverzameling van een affiene ruimte bepaald is door de rechtenverzameling.

**Stelling 1.2.11: De vlakkenverzameling is uniek bepaald**

*Zij $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$ en $\mathscr{A}' = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V}')$ affiene ruimten. Als elke rechte ten minste drie punten bevat, dan geldt $\mathscr{V} = \mathscr{V}'$.*

*Bewijs.* Daar elk vlak drie punten bevat die niet op een rechte liggen, en elk zulk drietal punten precies één vlak bepaalt, is het voldoende om te bewijzen dat, indien $V \in \mathscr{V}$ en $V' \in \mathscr{V}'$ drie punten $x_1, x_2, x_3$ gemeen hebben die niet op een rechte gelegen zijn, dan $V = V'$. De rechten bepaald door $x_1, x_2, x_3$ behoren alle tot $V \cap V'$. Zij nu $y$ een willekeurig punt van $V$. Indien de rechte $\langle y, x_1 \rangle$ niet evenwijdig is aan de rechte $\langle x_2, x_3 \rangle$, dan snijden die twee in een punt $z$, en de rechte $\langle z, x_1 \rangle$ is bevat in $V \cap V'$, dus ook $y$. Is $\langle y, x_1 \rangle$ wel evenwijdig met de rechte $\langle x_2, x_3 \rangle$, maar $\langle y, x_2 \rangle$ niet aan $\langle x_1, x_3 \rangle$, dan is analoog $y \in \langle y, x_2 \rangle \subseteq V \cap V'$. Is $\langle y, x_2 \rangle$ ook evenwijdig aan $\langle x_1, x_3 \rangle$, dan kiezen we op de rechte $\langle y, x_2 \rangle$ een derde punt $y' \notin \{y, x_2\}$, en dan is $\langle y', x_1 \rangle$ niet evenwijdig aan $\langle x_2, x_3 \rangle$. Uit een voorgaand argument volgt dan $y' \in V \cap V'$, en dus ook $y \in \langle y', x_2 \rangle \subseteq V \cap V'$.

We hebben dus bewezen $V \subseteq V'$. De omgekeerde inclusie is analoog.

Het feit dat de vlakkenverzameling bepaald is door de rechtenverzameling doet de vraag rijzen of we deze in de axioma's niet zouden kunnen weglaten (toch tenminste in het geval dat elke rechte ten minste drie punten bevat). Dat dit inderdaad het geval is, maar dan indien elke rechte ten minste *vier* punten bevat, zullen we hier niet bewijzen. Nog straffer, onder de voorwaarde dat ten minste één rechte ten minste vier punten bevat, is axioma (AR4) overbodig!

## 1.3 Affiene deelruimten, dimensie

We voeren nu het concept van 'deelruimten' in van affiene ruimten. We geven eerst de algemene abstracte definitie van een deelruimte, dan definiëren we meer specifiek een *affiene deelruimte* en bewijzen we enkele eigenschappen ervan. Vervolgens construeren we effectief deelruimten, op een inductieve manier (zie stelling 1.3.8). Aan de hand van de deelruimten zullen we eindelijk het begrip dimensie invoeren.

**Definitie 1.3.1: Deelruimten**

Zij $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$ een affiene ruimte. Een deelverzameling $D$ van $\mathscr{P}$ is een *deelruimte* indien geldt dat uit $x, y \in D$, met $x \neq y$, volgt dat $\langle x, y \rangle \subseteq D$. We noemen $D$ een *echte* deelruimte als $D \subsetneq \mathscr{P}$.

Volgens deze definitie is de ledige verzameling een deelruimte, en is ook elk singleton een deelruimte. In sommige naslagwerken wordt de ledige deelruimte niet als een deelruimte gezien, maar veel belang heeft het niet. Wij zullen de ledige wel als een (abstracte) deelruimte beschouwen. Elke rechte is ook een deelruimte, alsook elk vlak.

Indien elke rechte juist twee punten bevat, is elke verzameling punten een deelruimte. Dat is niet wat we willen, we willen iets bekomen dat zelf ook een affiene ruimte is. Vandaar dat we voor affiene ruimten een iets strengere definitie zullen invoeren en de corresponderende deelruimten dan *affiene deelruimten* noemen. De eigenheid van affiene ruimten, namelijk het bestaan van evenwijdige rechten, wordt gereflecteerd in de volgende definitie.

**Definitie 1.3.2: Affiene deelruimten**

Zij $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$ een affiene ruimte. Een (echte) deelruimte $D$ van $\mathscr{A}$ wordt een *(echte) affiene deelruimte* genoemd indien, zodra $D$ een rechte $L$ en een punt $x$ bevat, het dan ook de rechte door $x$ en evenwijdig aan $L$ bevat.

In stelling 1.3.5 bewijzen we dat een affiene deelruimte werkelijk een affiene ruimte is. Eerst tonen we aan dat als elke rechte ten minste drie punten bevat, dat elke deelruimte automatisch een affiene deelruimte is:

**Lemma 1.3.3** *In een affiene ruimte waarin elke rechte ten minste drie punten bevat, is elke deelruimte $D$ een affiene deelruimte.*

*Bewijs.* Onderstel dat $L$ een rechte is in $D$ en $x$ een punt. Uiteraard mogen we onderstellen dat $x \notin L$. Zij $y \in L$ en beschouw een punt $z \in \langle x, y\rangle \setminus \{x, y\}$. Kies $y' \in L \setminus \{y\}$ willekeurig. Dan is $\langle y', z\rangle \subseteq D$. Maar $\langle y', z\rangle$ is niet evenwijdig aan $L$, noch aan $\langle x, y\rangle$. Bijgevolg snijdt $\langle y', z\rangle$ de evenwijdige aan $L$ door $x$ in een punt $x'$ verschillend van $x$. Daar $x, x' \in D$, is ook $\langle x, x'\rangle \subseteq D$.

Affiene deelruimten hebben ook de volgende eigenschap.

**Lemma 1.3.4** *Bevat een affiene deelruimte $D$ van een affiene ruimte een vlak $V$ en een punt $x$, dan bevat $D$ ook het vlak door $x$ en evenwijdig aan $V$.*

*Bewijs.* De affiene deelruimte $D$ bevat elke rechte door $x$ die evenwijdig is aan een rechte van $V$. Bijgevolg bevat $D$ het vlak $V'$ door $x$ en evenwijdig aan $V$ (daar $V' \parallel V$ en dus elke rechte in $V'$ door $x$ een parallelle heeft in $V$).

We bewijzen nu de hoofdeigenschap van affiene deelruimten. Het zegt in essentie dat affiene deelruimten ook affiene ruimten zijn, zodra ze “voldoende groot” zijn.

**Stelling 1.3.5: Hoofdeigenschap van affiene deelruimten**

*Zij $D$ een affiene deelruimte van een affiene ruimte $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$. Zij $\mathscr{L}_{|D}$ de verzameling rechten die in $D$ gelegen zijn, en zij $\mathscr{V}_{|D}$ de verzameling van vlakken die in $D$ gelegen zijn.*

- *Als $D$ vier punten bevat die niet in een vlak gelegen zijn, dan is $(D, \mathscr{L}_{|D}, \mathscr{V}_{|D})$ een affiene ruimte.*
- *Als $D$ drie niet-collineaire punten bevat, maar geen vier die niet in een vlak gelegen zijn, dan is $(D, \mathscr{L}_{|D})$ een affien vlak.*
- *Als $D$ twee verschillende punten bevat, maar geen drie niet-collineaire, dan is $D$ een rechte.*

*Bewijs.* Onderstel dat $D$ drie niet-collineaire punten bevat, noem deze $x, y, z$. We bewijzen dat $V = \langle x, y, z \rangle \subseteq D$. Zij $L$ de evenwijdige aan $\langle x, y \rangle$ door $z$, dan ligt elk punt $t \in V \setminus (L \setminus \{z\})$ in $D$ omdat $z \in D$, $\langle z, t \rangle \cap \langle x, y \rangle \in D$ en $t \in \langle z, t \rangle$. Vervolgens ligt ook $L$ volledig in $D$ wegens definitie 1.3.2. Dus $V \subseteq D$. Bevat $D$ geen vier punten die niet in een vlak gelegen zijn, dan moet duidelijkerwijs en noodzakelijkerwijs $D = V$.

Onderstel nu dat $D$ ten minste vier punten bevat die niet alle in een gemeenschappelijk vlak gelegen zijn. We gaan de axioma's na van affiene ruimte zoals gegeven in definitie 1.1.9. Axioma (AR1) geldt wegens de definitie van deelruimte. Axioma (AR2) hebben we net nagegaan in voorgaande paragraaf. Axioma (AR5) geldt wegens onderstelling. Axioma (AR3) geldt omdat ze geldt in de affiene ruimte. Ook axioma (AR4) geldt, omdat twee parallelle rechten drie niet-collineaire punten bevatten die dan het vlak bepalen waarin de twee parallelle rechten gelegen zijn. De stelling is volledig bewezen.

Een andere fundamentele eigenschap van deelruimten is de volgende.

**Stelling 1.3.6: Doorsnede van (affiene) deelruimten**

*De doorsnede van een willekeurig aantal (affiene) deelruimten van een affiene ruimte is een (affiene) deelruimte.*

*Bewijs.* Zijn $x$ en $y$ twee punten van de doorsnede van een familie deelruimten, dan zijn die bevat in elk van die deelruimten, en is dus ook de rechte $\langle x, y \rangle$ bevat in elke deelruimte, zodat $\langle x, y \rangle$ bevat is in de doorsnede. Is $L$ een rechte in de doorsnede van een familie affiene deelruimten, en $x$ een punt in die doorsnede, dan liggen $x$ en $L$ in elke affiene deelruimte, en ligt wegens uniciteit, de rechte door $x$ evenwijdig aan $L$ ook in elke affiene deelruimte. Dus is die ook bevat in de doorsnede.

Voorgaande stelling laat ons toe om de volgende notatie te introduceren.

**Notatie**

Zij $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$ een affiene ruimte en zij $S \subseteq \mathscr{P}$. Dan noteren we door $\langle S \rangle$ de doorsnede van alle affiene deelruimten die $S$ bevatten.

Wegens voorgaande stelling is $\langle S \rangle$ zelf een affiene deelruimte, eentje die niet alleen $S$ bevat maar ook zelf bevat is in elke affiene deelruimte die $S$ bevat. Dit maakt van $\langle S \rangle$ *de kleinste affiene deelruimte* die $S$ bevat. We zeggen daarom ook wel dat $S$ de affiene deelruimte $\langle S \rangle$ *voortbrengt*.

We zijn nu klaar om algemeen de dimensie te definiëren.

**Definitie 1.3.7: Dimensie, voortbrengendheid en vrij deel**

Zij $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{V})$ een affiene ruimte.

- Dan is $d$ de dimensie van $\mathscr{A}$ als $d$ het kleinste kardinaalgetal is met de eigenschap dat er $d + 1$ punten bestaan in $\mathscr{A}$ die niet bevat zijn in een echte affiene deelruimte.
- Elke verzameling van punten die niet bevat zijn in een echte affiene deelruimte van $\mathscr{A}$ wordt een *voortbrengend deel* genoemd.
- Als elke punt $x$ van een verzameling van punten $S \subseteq \mathscr{P}$ de eigenschap heeft dat er een affiene deelruimte bestaat van $\mathscr{A}$ die $S \setminus \{x\}$ bevat, maar niet $x$, dan zeggen we dat $S$ een *vrij deel* is.
- Een *basis* is een vrij en voortbrengend deel.

De volgende uitspraken gaat men eenvoudig na.

- De dimensie van een singleton is gelijk aan $0$.
- De dimensie van een affiene rechte is gelijk aan $1$. Elke deelverzameling van ten minste (resp. ten hoogste) twee punten van een rechte is een voortbrengend deel (resp. vrij deel) van die rechte.
- De dimensie van een affien vlak is gelijk aan $2$. Elk drietal punten, niet op een gemeenschappelijke rechte gelegen, is een basis van het vlak voortgebracht door die drie punten.

Het doel is om nu te bewijzen dat, analoog aan de situatie in vectorruimten, elk paar basissen gelijkmachtig zijn, en het kardinaalgetal min één van een basis gelijk is aan de dimensie van $\mathscr{A}$. We zullen dit echter niet in het algemene geval doen, maar enkel in het geval dat de dimensie eindig is.